A matemática do GPS

Sérgio Alves
IME - USP

O estudo da esfera e de seus elementos fica naturalmente contextualizado quando exploramos sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes idéias geométricas, e o estabelecimento das relações entre eles conduzem a problemas geométricos relevantes (veja, por exemplo, [1]).

Neste artigo veremos que o estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e a relação entre coordenadas geográficas e cartesianas constituem a fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns modernos sistemas de navegação por satélites, em especial do **GPS**.

O que é e como funciona o GPS?

A sigla **GPS** nada mais é do que a abreviatura para **G**lobal **P**ositioning **S**ystem (sistema de posicionamento global). Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

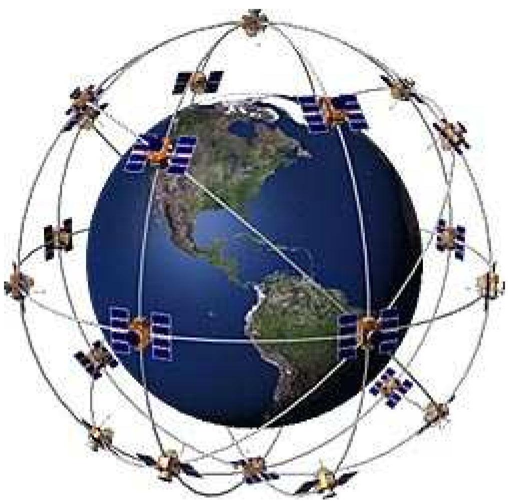

Figura 1
(site www.garmin.com)

O projeto foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos com o propósito de que aeronaves e navios militares pudessem determinar, em qualquer circunstância de tempo, sua posição exata. Ajuda no lançamento de mísseis e a localização de tropas terrestres em movimento foram outras necessidades que motivaram tal projeto.

Os projetistas do **GPS** também o planejaram para uso civil, porém com precisão menor do que para as operações militares.

O sistema NAVSTAR – **N**avigation **S**atellite **T**iming **a**nd **R**anging (aferição de tempo e localização por satélite de navegação), nome oficial dado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos ao **GPS**, consiste em um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.

Os vinte e quatro satélites que formam o segmento espacial do **GPS** trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizados por até dez satélites.

Todos os satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Existe uma "estação master", localizada no Colorado (Estados Unidos), que, com o auxilio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitora o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário. Após o processamento de todos esses dados, as correções e os sinais de controle são transferidos de volta para os satélites.

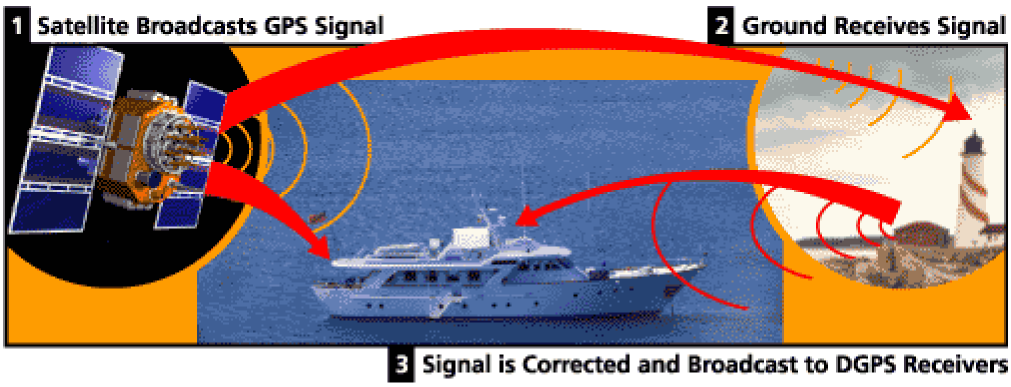

Figura 2
(site www.garmin.com)

Afinal, de que maneira o **GPS** determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

Cada um dos satélites do **GPS** transmite por um rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s – a velocidade da luz) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a chamada equação geral da imaginária superfície esférica.

Coletando-se sinais obtidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada, não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e elevação).

A precisão do tempo é essencial na operação do **GPS**. Um erro de um micro segundo (10^{-6} segundo) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção resulta num erro de 300 metros. Unidades receptoras do **GPS** extremamente precisas (e caras!) podem determinar sua posição a menos de um metro.

Com o fim da guerra fria, o **GPS** passou a oferecer uma precisão muito maior para o usuário civil, disponibilizando a ele a mesma precisão que só os militares tinham há algum tempo. Hoje em dia, com o auxílio do piloto automático e do **GPS**, uma aeronave civil é capaz de percorrer distâncias transatlânticas e pousar sem a interferência do piloto com erro de alguns centímetros em relação ao eixo da pista.

A navegação é a função primária do **GPS**, sendo usado em aeronaves, navios, veículos e por indivíduos que usam o receptor portátil ("de bolso").
Atualmente o **GPS** tem se mostrado útil em diversas situações, das quais destacamos algumas:

1. Roteirista de viagens: determinam além da sua posição dentro de uma cidade, quais as atrações e pontos turísticos mais próximos, hotéis, postos de emergências, etc.

2. Monitoramento de abalos sísmicos: tais abalos são precedidos por alterações no campo gravitacional que distorcem as ondas de rádio, permitindo, através do **GPS**, tentar prever a ocorrência de um terremoto com algumas horas de antecedência.

3. Meteorologia: o **GPS** gera informações para a previsão da meteorologia, estudo do clima e outros campos de pesquisa relacionados.

4. Localização para resgate: o serviço usa o **GPS** para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.

5. Aplicações industriais: áreas infectadas por pestes são identificadas por fotografias aéreas e, com o uso do **GPS**, um trator pode ser guiado para aplicações de pesticidas.

6. Uso militar: coordenadas de ataque, orientação e controle para mísseis balísticos, marcação de artilharia, bombardeio de aeronaves, defesa aérea, rastreamento de submarinos, localização de minas e radares inimigos, atos terroristas, etc.

7. Uso em segurança: monitoramento de trens, caminhões de carga ou qualquer veículo automotor.

Nos parágrafos a seguir pretendemos discutir, do ponto de vista matemático, o método utilizado pelo **GPS** na determinação da posição de um ponto sobre a superfície terrestre.

A superfície esférica em coordenadas cartesianas

Nesta seção trabalharemos num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em três dimensões com origem ***O***: dado um ponto ***P*** = (x, y, z) do espaço, uma dupla aplicação do Teorema de Pitágoras (veja a figura 3) mostra que a distância de ***O*** a ***P*** é expressa por

$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Mais geralmente, a distância entre os pontos ***P*** = (x, y, z) e ***C*** = (u, v, w) é dada pela fórmula

$$d(P,C) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}$$

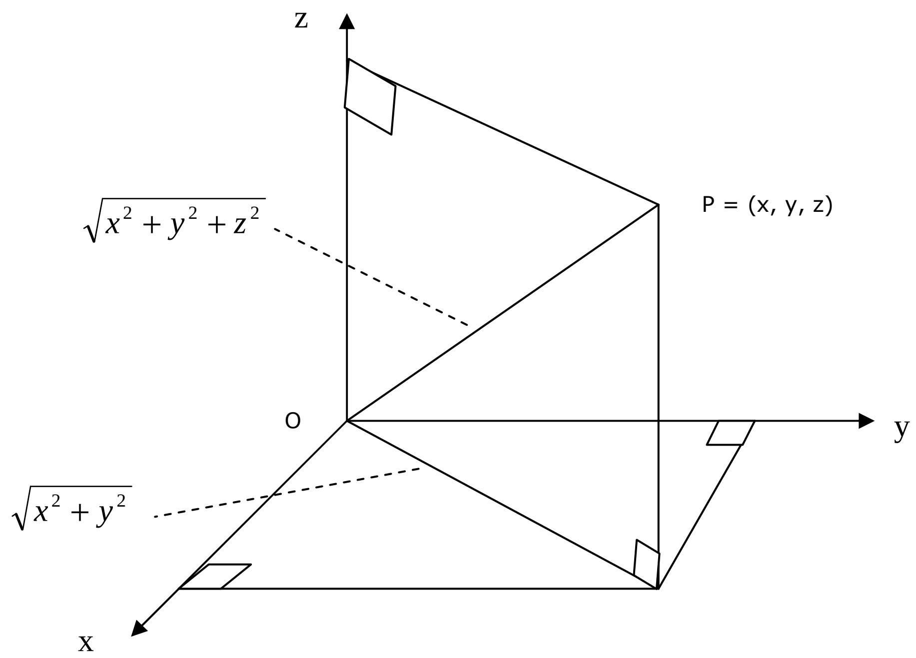

Figura 3

Sendo ***r*** um número real positivo e ***C*** um ponto fixado, o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a ***C*** é igual a *r* é chamado **superfície esférica *S d*e centro *C* e raio *r***. Se ***C*** = (u, v, w), então ***S*** é descrita como o conjunto dos pontos *P* = (x, y, z) tais que

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2 \qquad (1)$$

A equação (1) é denominada **equação reduzida de *S***. Assim, por exemplo, $(x+1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro C = (-1, 2, 0) e raio *r* = 2.

Desenvolvendo os quadrados em (1), obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

que é a uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \qquad (3)$$

onde *a*, *b*, *c* e *d* são números reais.

A equação (2) é chamada **equação geral de *S***. Assim, a superfície esférica de centro ***C*** = (-1, 2, 0) e raio ***r*** = 2 tem como equação geral

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

Sejam ***S*** e ***S′*** duas superfícies esféricas de centros distintos ***C*** e ***C′***, respectivamente. Sendo ***r*** e ***r′***, ***r*** ≥ ***r′***, seus respectivos raios, vemos que

$$S \cap S^{'} \text{ é vazio se e somente se } d(O,O^{'}) > r + r^{'} \text{ ou } d(O,O^{'}) < r - r^{'}$$

$$S \cap S^{'} \text{ é um ponto se e somente se } d(O,O^{'}) = r + r^{'} \text{ ou } d(O,O^{'}) = r - r^{'}$$

$$S \cap S^{'} \text{ é uma circunferência se e somente se } r - r^{'} < d(O,O^{'}) < r + r^{'}$$

Uma prova desse fato pode ser encontrada em [1] e sugerimos ao leitor que elabore desenhos ilustrando cada uma das possibilidades.

O resultado a seguir desempenha um papel importante na fundamentação matemática do funcionamento do **GPS**.

Teorema

Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.

Prova

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4, respectivamente.

Mostraremos que, se existe um ponto *P* tal que

$$P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$$
$$\text{e } C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ não são coplanares, então}$$
$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$$

Sendo

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_j x + b_j y + c_j z + d_j = 0$$

as equações gerais de S_j, onde j = 1, 2, 3, 4, ao subtrairmos estas equações, duas a duas, obtermos equações lineares em *x*, *y* e *z*, uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

Uma tal equação linear determina um plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2, obtém-se a equação de um plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contêm $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3 \text{ e } S_1 \cap S_4$ temos que, se ***P*** = (x, y, z) está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, então (x, y, z) é solução do sistema linear abaixo, denominado como Sistema Linear 1.

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

$$(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0$$
$$(a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o Sistema Linear 1 tem uma única solução, pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretaria duas soluções distintas no Sistema Linear 1.

Sendo ***C_j*** = (u_j, v_j, w_j) o centro de ***S_j***, j = 1, 2, 3 ,4, comparando as equações (2) e (3), temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$, $c_j = -2w_j$ de modo que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 * \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

Como ***C₁***, ***C₂***, ***C₃*** e ***C₄*** são não coplanares, segue que o determinante à direita é não nulo e, portanto, o Sistema Linear 1 é um sistema linear com determinante não nulo, tendo assim uma única solução (veja, por exemplo, [3]).

Evidentemente, o simples fato de o Sistema Linear 1 ter um única solução, o que equivale a dizer que os centros são não coplanares, não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste em um único ponto ***P***. Em outras palavras, a hipótese

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \phi$$

é essencial para a validade do teorema.

É interessante observar que, na situação real do **GPS**, essa hipótese é comprovada pela existência do próprio usuário!

A eventual solução do Sistema Linear 1 nos dará o procurado ponto ***P*** desde que pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas ***S_1***, ***S_2***, ***S_3*** e ***S_4***.

Considere, por exemplo, as superfícies esféricas:

S_1: centro (0, 0, 1) e raio $\sqrt{2}$;
S_2: centro (0, 3, 0) e raio $\sqrt{10}$;
S_3: centro (2, 0, 0) e raio 1;
S_4: centro (0, 0, 0) e raio 1.

Seus centros são não coplanares e o Sistema Linear 1 é , neste caso,

6y – 2z = 0
4x - 2z - 4=0
-2z=0

Este sistema tem, como única solução:

x=1;
y=0;
z=0.

Uma verificação simples mostra que ***P*** = (1, 0, 0) pertence simultaneamente a S_1, S_2, S_3 e S_4 de modo que:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{(1,0,0)\}$$

As coordenadas geográficas de um ponto do espaço

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem ***O*** no centro da Terra, o eixo ***Oz*** positivo apontando na direção do Pólo Norte, o plano ***Oxy*** sendo o plano do equador com o eixo ***Ox*** positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo ***Oy*** positivo cortando o meridiano de longitude 90^o E.

Dado um ponto ***P*** = (x, y, z) do espaço, sejam **θ** e **φ** as medidas dos ângulos assinalados na Figura 4.

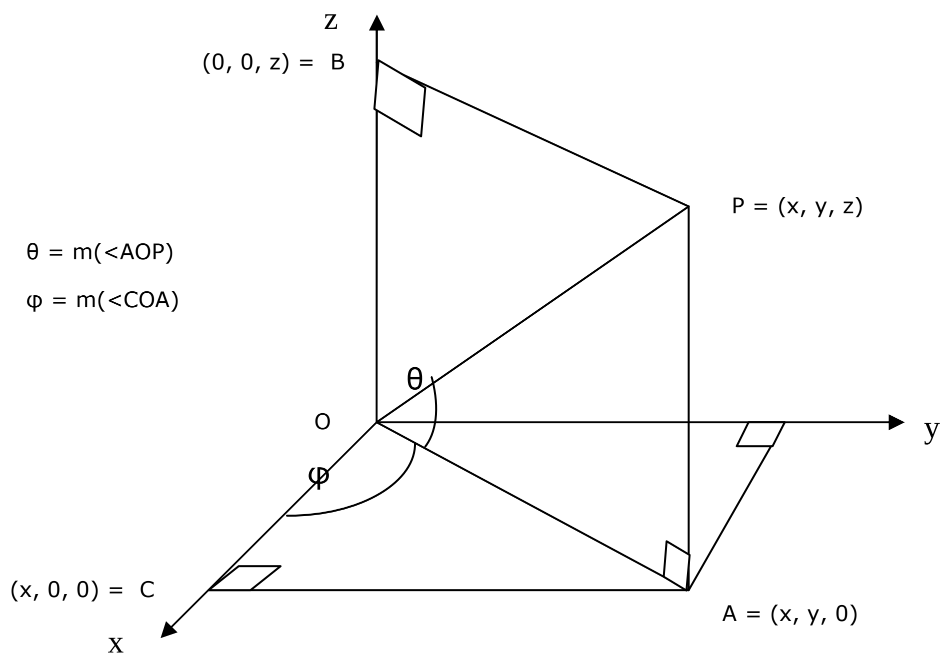

Figura 4

Quando ***P*** está sobre a superfície terrestre, os valores **θ** e **φ** acima indicados correspondem exatamente à habitual latitude e longitude do ponto ***P*** e, por isso, manteremos a mesma nomenclatura para **θ** e **φ**.

A diferença entre ***OP*** = $d(O,P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e o raio da Terra é chamada elevação (ou altitude) de ***P*** = (x, y, z).

A latitude, a longitude e a elevação são chamadas **coordenadas gráficas** do ponto ***P***. Vejamos como relacioná-las com as coordenadas cartesianas de ***P***.

No triângulo retângulo ΔOPB da Figura 4, temos

$\cos(90-\theta)=\dfrac{OB}{OP}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e, como $\cos(90-\theta)=sen\theta$ segue que

$$sen\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Essa expressão atribui a **θ** um único valor entre 0 e 90 quando z > 0 e um único valor entre -90 e 0 quando z < 0. No primeiro caso, dizemos que a latitude de ***P*** é **θ° N** (norte), enquanto no segundo a latitude de ***P*** é **(-θ)° S** (sul). Por outro lado, no triângulo retângulo ΔOAC temos

$$sen\varphi=\frac{AC}{OA}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad \cos\varphi=\frac{OC}{OA}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Essas expressões definem um único **φ** entre 0 e 180 quando y > 0 e dizemos que a longitude de ***P*** é **φ° E** (leste). Quando y < 0, **φ** assume um único valor entre – 180 e 0 e, nesse caso, a longitude de ***P*** é **(-φ) ° W** (oeste).

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas geográficas do ponto ***P*** cujas coordenadas cartesianas são dadas, em metros, por

$$P=(3\sqrt{3}\times10^6,-3\times10^6,6\sqrt{3}\times10^6).$$

Temos que

$$x^2+y^2+z^2= \ 27\times10^{12}+9\times10^{12}+108\times10^{12}=144\times10^{12} \text{ e}$$

$$x^2+y^2=27\times10^{12}+9\times10^{12}=36\times10^{12}.$$

Logo, $sen\theta=\dfrac{6\sqrt{3}\times10^6}{12\times10^6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Portanto **θ** = 60°.

Como $sen\varphi=-\dfrac{3\times10^6}{6\times10^6}=-\dfrac{1}{2}$ e $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}\times10^6}{6\times10^6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos **φ** = -30°.

Assim, as coordenadas geográficas de ***P*** são **θ** = 60º N e **φ** = 30º W. Supondo o raio da Terra igual a 6,4 X 10^6 metros, temos que a elevação de ***P*** mede 12 X 10^6 – 6,4 X 10^6 = 5,6 X 10^6 metros.

Uma situação real

O exemplo abaixo, extraído de [4], retrata uma situação real em que um usuário do **GPS** é detectado por quatro satélites. A tabela indica as efemérides (em metros) de cada satélite tomadas em relação ao nosso fixado sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

	x	**y**	**z**
Satélite 1	1,877191188 x 10^6	-1,064608026 x 10^7	2,428036099 x 10^7
Satélite 2	1,098145713 x 10^7	-1,308719098 x 10^7	2,036005484 x 10^7
Satélite 3	2,459587359 x 10^7	-4,336916128 x 10^6	9,090267461 x 10^6
Satélite 4	3,855818937 x 10^6	7,251740720 x 10^6	2,527733606 x 10^7

O receptor **GPS** registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	**Satélite 2**	**Satélite 3**	**Satélite 4**
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Note que as informações transmitidas no sistema **GPS** envolvem, por uma questão de precisão, dez ou mais dígitos. Se este exemplo for uma atividade em sala de aula, torna-se imprescindível a utilização de calculadoras ou *softwares* com capacidade de resolver sistemas lineares com coeficientes dessa ordem. Outra alternativa, abrindo mão da precisão, é trabalhar com um número menor de dígitos e utilizar a notação científica, criando um bom momento para o professor discutir as vantagens e desvantagens de trabalhar com aplicações em sala de aula (veja [2]).

Multiplicando-se cada lapso de tempo pela velocidade da luz (2,99792458 x 10^8 m/s), obtemos a distância entre o receptor e cada satélite. Isso permite escrever as equações reduzidas das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas.

$$S_1 : (x - 1{,}8 \times 10^6)^2 + (y + 10{,}6 \times 10^6)^2 + (z - 24{,}2 \times 10^6)^2 = 611{,}9 \times 10^{12}$$
$$S_2 : (x - 10{,}9 \times 10^6)^2 + (y + 13{,}0 \times 10^6)^2 + (z - 20{,}3 \times 10^6)^2 = 535{,}4 \times 10^{12}$$
$$S_3 : (x - 24{,}5 \times 10^6)^2 + (y + 4{,}3 \times 10^6)^2 + (z - 9{,}0 \times 10^6)^2 = 426{,}7 \times 10^{12}$$
$$S_4 : (x - 3{,}8 \times 10^6)^2 + (y - 7{,}2 \times 10^6)^2 + (z - 25{,}2 \times 10^6)^2 = 549{,}0 \times 10^{12}$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos as respectivas equações gerais, e o Sistema Linear 1 é dado por

$$18{,}2\,x - 4{,}88\,y - 7{,}84\,z - 76{,}52 \times 10^6 = 0$$
$$45{,}43\,x + 12{,}61\,y - 30{,}38\,z - 185{,}23 \times 10^6 = 0$$
$$3{,}95\,x + 35{,}79\,y + 1{,}99\,z - 62{,}95 \times 10^6 = 0$$

cuja única solução é $x = 0{,}5660 \times 10^7$, $y = 0{,}0978 \times 10^7$ e $z = 0{,}2775 \times 10^7$.

O ponto ***P*** com essas coordenadas cartesianas pertence simultaneamente às quatro imaginárias superfícies esféricas e suas coordenadas geográficas, calculadas como no parágrafo anterior (considerando o raio da Terra medindo $6{,}378164 \times 10^6$ metros), são

Latitude: $\theta = 26^\circ$ N; Longitude: $\varphi = 10^\circ$ E; Elevação: 919,71 metros.

Consultando um atlas geográfico ou um globo terrestre, identificamos a posição desse usuário do **GPS** como sendo a cidade de Djanet, localizada nos Montes Tássili, na fronteira entre Argélia e Líbia.

Referências bibliográficas

[1] ALVES, S. *A geometria do globo terrestre*, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004 (disponível pela Internet no *site* www.bienasbm.ufba.br).

[2] AMES, P. *Uma professora de olho nas aplicações*, em Aplicações da Matemática Escolar, MAA e NCTM (tradução de Domingues H.), Atual Editora, 1997.

[3] LIMA, E. L. *Coordenadas no espaço*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

[4] NORD, G. D., Jabon, D and Nord, J. *The mathematics of the Global Positioning System*, The Mathematics Teacher, vol. 90, nº 6, September, 1997.

Site: www.garmin.com